Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^o*34(2006), 176–189*

Complejidad: Mecánica Estadística y Ciencia No Lineal

Angel Sánchez

Grupo Interdisciplinar de Sistemas Complejos
Departamento de Matemáticas
Universidad Carlos III de Madrid

Instituto de Biocomputación y Física de Sistemas Complejos
Universidad de Zaragoza

anxo@math.uc3m.es

4 de abril de 2006

Resumen

En este artículo se hace una presentación desde un punto de vista personal del campo de investigación "Complejidad: Mecánica Estadística y Ciencia No Lineal" correspondiente a la sesión celebrada durante el CEDYA 2005, discutiendo especialmente su contexto y su relevancia para la comunidad española de Matemática Aplicada.

Palabras clave : *Sistemas complejos, mecánica estadística, ciencia no lineal*
Clasificación por materias AMS : *34-xx, 35-xx, 37-xx, 60-xx, 62-xx, 65-xx, 76-xx, 82-xx, 91-xx, 92-xx*

1. Introducción

Cuando el Comité Científico del CEDYA 2005, celebrado el pasado septiembre en la Universidad Carlos III de Madrid, decidió incluir una sesión monográfica sobre "Complejidad" y me encargó el llevarla a cabo, me sentí, obviamente, honrado y halagado, pero sobre todo, me sentí abrumado. ¿Cómo podía intentar dar una idea de la investigación que se hace bajo el nombre de "Complejidad" o "Sistemas Complejos" en tres o cuatro charlas y dos horas de tiempo? Sin embargo, la sesión resultó muy interesante e inspiradora (¡qué voy a decir yo!), fundamentalmente gracias a los conferenciantes que tomaron parte en ella. Con todo y ello, los asistentes a la sesión se llevaron inevitablemente una impresión parcial del campo de la "Complejidad" (o cuatro impresiones parciales, claro). Por tanto, lo que pretendo en este artículo es dar mi visión de la investigación sobre los sistemas complejos, tanto para aquellos que no pudieron asistir a la sesión, como por completar aspectos que no tuvieron cabida en ella. Obviamente, cuando digo mi visión, quiero dejar claro que es personal, subjetiva y fuertemente influida por mi propia actividad. Aún así, espero al menos excitar la curiosidad de los lectores sobre estos temas e interesarlos en esta línea de investigación, tan ligada a las Matemáticas y donde los matemáticos, no sólo, pero en particular los matemáticos aplicados, tenemos mucho que aportar.

2. ¿Qué son los sistemas complejos?

El nombre "Complejidad", al menos en este trabajo[1], se refiere al estudio de los sistemas complejos: La Ciencia de la Complejidad es un nuevo campo que *estudia los comportamientos emergentes* en los sistemas con gran número de partes, componentes o agentes, es decir, los comportamientos y fenómenos colectivos que aparecen debido a la interacción y que no son predecibles ni entendibles a partir de los individuales. Los sistemas sociales, formados en buena medida por personas, el cerebro, formado por neuronas, las moléculas, formadas por átomos, el tiempo atmosférico, formado por flujos de aire y agua, son buenos ejemplos de sistemas complejos. Esta disciplina tiene un carácter horizontal intrínseco que toca todas las ramas tradicionales de la Ciencia, así como a la Ingeniería, la Gestión o la Medicina, centrándose en las cuestiones sobre las partes, el todo y sus relaciones. Hay tres aspectos interrelacionados básicos involucrados: el estudio de cómo las interacciones dan lugar a los patrones de comportamiento, el diseño de nuevos métodos de describir y analizar sistemas complejos, y el proceso de formación de tales sistemas.

Siendo un poco más formales, podemos decir que un sistema complejo está constituido por muchas partes, iguales o distintas, que generalmente se comportan de manera no lineal, y que están acopladas, lineal o no linealmente. Un sistema tal puede ser discreto, como en el caso de los autómatas celulares y las ecuaciones en diferencias, o puede ser continuo, como en un sistema de ecuaciones diferenciales o una ecuación en derivadas parciales. Es el hecho de su no linealidad intrínseca lo que hace que los sistemas complejos sean algo más que la suma de sus partes, es decir, que su comportamiento sea impredecible desde una perspectiva puramente reduccionista, como ya hemos dicho. En ese sentido, la investigación sobre sistemas complejos solapa sustancialmente con la que se realiza sobre dinámica no lineal, pero los sistemas complejos son diferentes en el sentido de que incluyen un número no pequeño de partes dinámicas que interactúan entre sí.

La Ciencia de la Complejidad está recibiendo más y más atención desde distintos sectores interdisciplinares (véase en [2] un listado exhaustivo e interactivo de las aplicaciones de la Complejidad), y en particular en el

[1]En principio, no debemos confundir "complejidad" con "complejidad computacional". Ésta es una disciplina bien definida cuyo objetivo es el análisis del esfuerzo computacional que requiere resolver un problema. Sin embargo, no son campos totalmente disjuntos. Un libro muy interesante al respecto es [1].

contexto europeo. En este sentido, cabe mencionar la convocatoria específica del Programa NEST (New and Emerging Science and Technology, nuevo en el 6° Programa Marco y que podría desembocar en el European Research Council en el 7°) sobre "Tackling Complexity" (con su edición más reciente abierta hasta el 15 de febrero de 2006, y con sus actividades coordinadas a través de la Acción GIACS [3]). Por otro lado, la existencia de instituciones como el Santa Fe Institute for Complex Systems [4], totalmente privadas y apoyadas por empresas que van desde la informática (Intel, Sun) a la banca (Credit Suisse First Boston) pasando por los automóviles (Ford, Toyota) o la tecnología (Lockheed Martin) indica la gran relevancia que la Ciencia de la Complejidad está adquiriendo en el esquema de I+D+i a nivel mundial.

3. Origen y bases de la Complejidad

Se suele asignar el papel de "primera piedra" de la Ciencia de la Complejidad al artículo *More is different* [5], del premio Nobel de Física Phil Anderson, cuyo título se refiere precisamente al concepto de "emergencia" que mencioné en la sección anterior, y sobre el que volveré más abajo. No voy a discutir el papel inspirador y pionero de este artículo, antes al contrario, me parece una lectura muy interesante, pero yo creo que la Complejidad no surge como un campo con personalidad propia en los noventa. ¿Por qué? Por un lado, por que es en los noventa cuando los ordenadores, la capacidad de cálculo, se hace accesible a cualquiera, y sin disponer de esta herramienta el estudio de los sistemas complejos es punto menos que imposible; y por otro, porque en esa década se comenzó a entender, particularmente en la comunidad de Física Estadística y No Lineal, que los objetos en interacción de los que se ocupa la Mecánica Estadística no tienen porque ser partículas, sino que pueden ser prácticamente lo que uno quiera. Y eso convirtió a la Mecánica Estadística, que tenía más o menos un siglo por entonces, en una de las herramientas básicas de la Complejidad. Hablemos un poco de ella.

La Mecánica Estadística es originalmente la aplicación de la Estadística, con su bagaje matemático para tratar con poblaciones grandes, a la Mecánica, que se ocupa del movimiento de partículas u objetos sujetos a una fuerza [6]. Sus pioneros fueron J. Willard Gibbs y Ludwig Boltzmann, a finales del siglo XIX. Básicamente, la Mecánica Estadística proporciona un marco para relacionar las propiedades microscópicas de, por ejemplo, átomos o moléculas individuales con las propiedades macroscópicas de los materiales. Así, su aplicación original Fue en física, donde se utiliza entre otras cosas para fundamentar la Termodinámica. Sin embargo, el concepto es mucho más general y trasciende esta aplicación física, ya que no necesita aplicarse a átomos o moléculas sino que describe cualquier colectividad de objetos cuya dinámica individual e interacciones mutuas son conocidas. Es decir: a los sistemas complejos. La Mecánica Estadística es el marco matemático ideal para describir esos sistemas que, como hemos dicho, constan de muchos componentes acoplados. Y en esos componentes, a veces en ellos, a veces en su acoplamiento, es donde entra la no linealidad, el otro aspecto fundamental de la Complejidad.

Decía el gran matemático Stanislaw Ulam que llamar “no lineal” a una ciencia es como referirse a la zoología como el estudio de los animales no humanos. No puedo estar más de acuerdo, ya que muy pocas cosas de las que nos rodean son lineales. En Matemáticas tenemos muy claro lo que quiere decir “no lineal”, por ejemplo si hablamos de sistemas dinámicos no lineales. Pero el nombre “Ciencia No Lineal” pretende ser más amplio (véase la reciente y monumental enciclopedia compilada por Alwyn Scott [7]). Simplificando drásticamente y sin pretender ser exhaustivo, podríamos decir que la ciencia no lineal comprende cuatro paradigmas básicos: el caos determinista, las estructuras coherentes, la formación, competición y selección de patrones, y la dinámica adaptativa o evolutiva. El impacto de esos paradigmas se puede entender en términos de su relevancia interdisciplinar. El caos aparece, por ejemplo, en la actividad eléctrica de sistemas biológicos, en la transición de un fluido a la turbulencia, y en el movimiento de planetas. Las estructuras coherentes describen tanto la gran mancha roja de Júpiter como los tsunamis o los sistemas de comunicación óptica. Nos encontramos problemas relacionados con patrones en fenómenos tan distintos como la recuperación de petróleo, las interacciones láser-plasma o la morfogénesis. Y por último, la dinámica evolutiva nos habla de cosas como la evolución biológica, las redes neuronales o la vida artificial. Creo que estos ejemplos dejarán claro la imposibilidad de una definición formal de Ciencia No Lineal, pero también que está llamada a ser una herramienta básica en el estudio de los sistemas complejos. Vuelven además sobre otra observación recurrente: la Complejidad es un campo eminentemente interdisciplinar. De esto hablaremos en la siguiente sección.

4. La Complejidad como ciencia interdisciplinar

De la discusión precedente sobre el origen y las bases de la Complejidad podría concluirse que es, simplemente, una rama de la física, a la que se le ha puesto nombre y ha cuajado[2]. Nada más lejos de la realidad. Como muestra el esquema de la figura 1, el estudio de los fenómenos emergentes rompe las fronteras tradicionales entre campos de la ciencia. Como dice Anderson [5], muchas veces los objetos elementales pertenecen a una ciencia (p.ej., la química) y los emergentes a otra (p.ej., la biología). Y lo mismo ocurre con los métodos de la complejidad: suelen caer en el espacio interdisciplinar. A este respecto, citaré a Maxi San Miguel [10]:

> Donde aparece la interdisciplinariedad es precisamente en el salto entre dos niveles de la estructura jerárquica de la Ciencia, y/o

[2]Como el diálogo de la película *Monstruos S.A.* (Peter Docter, 2001):
— Sulley: Mike, ésa no es la puerta de Boo.
— Mike: ¿Boo? ¿Qué es Boo?
— Sulley: Es. . . cómo he decidido llamarla. ¿Algún problema?
— Mike: Sulley, no deberías ponerle nombre. En cuanto le pones un nombre, empiezas a encariñarte con ello. Así que deja esa cosa dónde estaba.

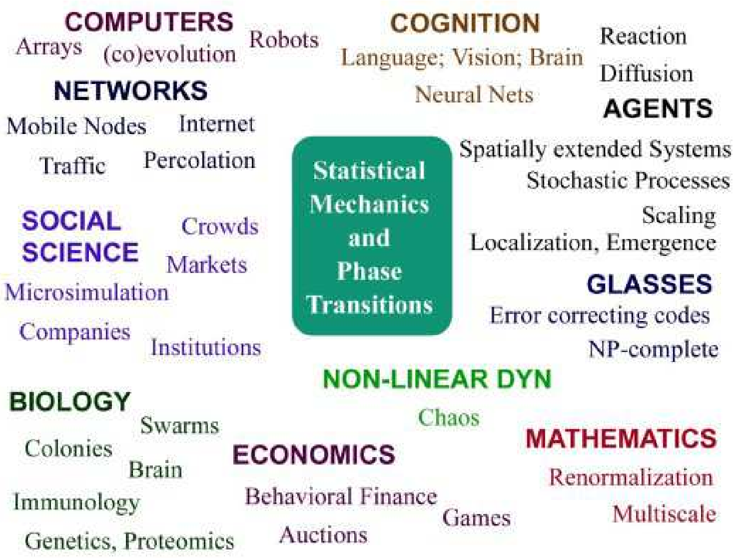

Figura 1: Esquema de la Complejidad y de sus campos vecinos, tomado de [8]. Hay una versión mucho más detallada y elaborada en [9].

> en el espacio no colonizado entre dos disciplinas bien establecidas, y/o en la creación de nuevos campos del saber. [...] La investigación interdisciplinar no se refiere pues a un carácter pluri o multidisciplinar que implica una simple superposición de expertos o especialistas en campos diversos que ofrecen sus técnicas para la solución de un problema. Por el contrario, se refiere a la voluntad decidida de cruzar fronteras entre campos establecidos y de forzar la imaginación para transferir conceptos de unos campos a otros, partiendo de que la constatación de que el estudio a través de esas fronteras es fuente de grandes progresos del conocimiento.

En todo caso, y más allá de la discusión, frustrante por irresoluble e intútil, sobre si la Complejidad es Física, Matemáticas, Filosofía o Botánica, las Matemáticas en general y la Matemática aplicada en particular tienen mucho que decir en el estudio de la Complejidad, y mucho terreno donde investigar, aportar, y enriquecerse [11]. Recordemos el paradigma tradicional del modelado en Matemática Aplicada: de acuerdo al texto clásico de Lin y Segel [12] el procedimiento de modelado matemático pasa por tres fases: *formulación*, o traducción del problema científico a términos matemáticos; *análisis*, o solución matemática del modelo, e *interpretación y verificación* de la solución en términos del problema original. Esto es precisamente el *modus operandi* de la investigación en sistemas complejos, como veremos en los ejemplos que discutiremos más abajo. Por otro lado, el primer (y anhelado) Plan Nacional de Matemáticas [13] nos recuerda, en su epígrafe sobre Matemática Aplicada y Computacional:

> En esta área confluyen una investigación de carácter más teórica en la que se analizan cuestiones tales como la existencia, unicidad y propiedades cualitativas de soluciones, con los métodos asintóticos y perturbativos propios de la Física y de la Ingeniería que permiten frecuentemente predecir propiedades cualitativas de los modelos. Todas estas técnicas confluyen en temas de gran importancia por sus aplicaciones tales como la dinámica no lineal, el caos y la complejidad.

Y es que ciertamente, la Complejidad ofrece grandes oportunidades para hacer y aplicar matemáticas. Por ejemplo, como dice Steven Strogatz [14], se echa en falta algo conceptualmente equivalente al Cálculo, una manera de ver las consecuencias de la multitud de interacciones que definen un sistema complejo. Asimismo, dada la importancia de los acoplamientos entre partes del sistema, la teoría de grafos es un hervidero de actividad reciente a este respecto. ¿Y qué decir de las ecuaciones, tanto diferenciales como parciales, en diferencias o difero-diferenciales? Por no hablar, por ejemplo, de las propiedades espectrales de operadores, cruciales para tratar con transiciones de fase. O de la formalización pendiente de técnicas de simulación numérica basadas en agentes, o de la teoría de control, o de técnicas de homogeneización, o de... Prácticamente, cualquier rama de la matemática tiene algo que aportar a esta disciplina en formación. Y además, la interacción con el ordenador abre un mundo de posibilidades, ya que, en palabras de Norman Zabusky [15], uno de los descubridores de las soluciones tipo solitón de ecuaciones en derivadas parciales no lineales, "con el uso juicioso de los ordenadores podemos penetrar en nuevas áreas y descubrir conexiones entre campos diversos de las matemáticas que escaparon a nuestros predecesores."

5. Algunos ejemplos

Pero basta ya de generalidades y, digamos, palabrería. Mostrad cómo, dicen. Pues qué mejor ejemplo que los que se presentaron en la Sesión sobre Complejidad de CEDYA 2005.

Redes complejas

Por empezar hablando de algo tan importante para un sistema complejo como es la red de conexiones entre sus partes, centrémonos en el tema de "redes complejas" (léase grafos complejos). El interés sobre este asunto se originó a finales de los años 90, con el re-descubrimiento [16] de las llamadas redes de pequeño mundo. Este nombre se refiere a la observación de que bastan muy pocos pasos para ir de una persona a otra pasando por sus conocidos[3]. Cuando se

[3]Un ejemplo muy matemático de esta idea es el llamado número de Erdös, el número de colaboradores que ligan a Paul Erdös con cada uno a través de coautores. El propio Erdös

empezaron a aplicar conceptos similares a redes tan importantes como "la" red, internet, se desató el boom: se trabaja sobre distribuciones de grados, *clustering*, correlaciones, modelos de grafos aleatorios, modelos de crecimiento de redes, conexión preferencial, procesos dinámicos sobre redes,... Un mundo (una buena referencia reciente es [17]).

En este sentido, Yamir Moreno, del Instituto de Biocomputación y Física de Sistemas Complejos, Universidad de Zaragoza, presentó un interesante trabajo sobre el problema del recubrimiento. Un gran numero de problemas en redes de comunicación requieren una distribucion de recursos óptima y eficiente tanto para el almacenamiento y distribución de la información como para la respuesta ante fallos o ataques. Formalmente el problema del recubrimiento consiste en encontrar cual es el menor subconjunto de elementos de una red (nodos) tal que cualquier miembro de ésta disponga de un elemento de este subconjunto a una distancia menor que una dada. En la sesión, Yamir presentó un método heurístico para hallar soluciones casi óptimas al problema del recubrimiento en redes reales con correlaciones, y mostró su importancia a la hora de analizar procesos de difusion de virus mediante un modelo epidemiologico tipo S.I.R., asi como en posibles estrategias de inmunizacion.

Simulación de choques en sistemas de aguas someras

Si el ejemplo anterior correspondía a uno de los temas más recientes dentro de la Complejidad, el trabajo que nos presentó Carlos Parés, de la Universidad de Málaga es más clásico, y tiene que ver con el paradigma de las estructuras coherentes mencionado más arriba: las discontinuidades que se generan en algunos sistemas de leyes de conservación y sus generalizaciones [4]. Estas discontinuidades se corresponden con fenomenos observables en la práctica que involucran variaciones abruptas de alguna de las magnitudes físicas del medio cuya evolución se desea simular: éste es el caso de la explosion sonica que genera un movil que supera la velocidad del sonido. Asimismo, este tipo de variaciones abruptas puede ser observado fácilmente en la superficie libre del agua en movimiento: basta pensar en el frente que se forma tras la ruptura de una presa o al alcanzar la costa un tsunami. Como ingrediente adicional que "complejifica" el problema a estudiar, en fluidos estratificados este tipo de fenómenos no solo aparece en la superficie libre: también son observables variaciones abruptas de la interfaz que separa dos capas consecutivas de agua de diferente densidad. Es el caso del Estrecho de Gibraltar: las medidas obtenidas en campañas oceanográficas registran variaciones súbitas de la interfaz que separa las aguas de naturaleza mediterránea y atlántica, cuyas amplitudes pueden ser superiores a 100 metros. Obviamente, dada la importancia de este

tiene número 0; sus coautores tienen número 1; los coautores de éstos tienen número 2, y así sucesivamente. El número de Erdös promedio es 5, el máximo conocido es 13, y casi toda la población estudiada tiene número de Erdös entre 0 y 8. El mío es 4, y se puede averiguar fácilmente el de cualquiera utilizando MathSciNet. Véase `http://www.oakland.edu/enp/`.

[4] La conferencia plenaria de Marco Fontelos en CEDYA 2005 sobre singularidades en interfases fluidas es un ejemplo hasta cierto punto relacionado. Más información en [18].

tipo de fenómenos, que Carlos ilustró con la riada tóxica de Aznalcóllar o las corrientes de marea del Estrecho, es necesario que los esquemas numéricos a utilizar sean capaces de aproximar correctamente la formación y propagación de dichas discontinuidades. Estamos así ante un problema de muchas escalas, característico de la Complejidad. Estos trabajos se encuentran estupendamente presentados y con referencias en [19].

El corazón como un sistema complejo

Y siguiendo con las aplicaciones o ejemplos de interés obvio, Víctor Pérez García, de la Universidad de Castilla-La Mancha nos introdujo en el difícil mundo del modelado del corazón (aunque yo originalmente le contacté para que hablara de solitones en condensados de Bose-Einstein, otro sistema complejo muy de actualidad en el que también es un experto [20]). En este caso, su trabajo nos ponía ante la situación habitual a la hora de modelar un sistema complejo para intentar entenderlo: ¿Qué es lo importante? ¿Qué puedo eliminar? De hecho, ésta es muchas veces la razón por la cual en otros campos, pienso como un buen ejemplo en la Biología, se desprecia olímpicamente la aportación de la Complejidad, con el argumento de que o se incluye todo en el modelo, o el modelo no sirve para nada por poco realista. Con un *case study* tan importante como el corazón, Víctor nos mostró que no es así: tras una necesaria introducción general a la electrofisiología cardiaca, expuso los problemas que surgen en el modelado mediante ecuaciones ordinarias a nivel de célula y en derivadas parciales a nivel de propagación en fibras y tejido. Al igual que en el caso anterior, la aparición de múltiples escalas y objetos a modelar conlleva problemas en la simulación, para lo cual se construyen métodos numéricos adaptados a las especificidades de los modelos y la geometría compleja del problema. Encontramos también otras características de muchos trabajos en Complejidad, como es el que se describen flujos en medios inherentemente discretos (formados por células) con ecuaciones continuas (en derivadas parciales) observando el sistema a una escala muy grande (comparada con la de la célula). Finalmente, es interesante notar que cuando se aplica el modelo al estudio de la fibrilación ventricular, estamos de nuevo ante el paradigma de las estructuras coherentes, pero acompañado por el de formación de patrones.

Ecuaciones diferenciales estocásticas en derivadas parciales

Otro ingrediente fundamental de muchos sistemas complejos es un cierto grado de aleatoriedad o ruido. Este aspecto fue cubierto en la sesión por José M. Sancho, de la Universitat de Barcelona, que resumió desde el punto de vista de las aplicaciones lo que se viene haciendo en el campo de las ecuaciones en derivadas parciales estocásticas. Las más sencillas aparecen de forma natural al introducir un ruido blanco gaussiano aditivo (que en Mecánica Estadística se interpreta como el efecto de un baño térmico a una temperatura dada) en la ecuación de difusión. Aunque esta ecuación parezca muy simple da lugar a comportamientos interesantes y típicos de los sistemas complejos, como la aparición de leyes de escala, la universalidad, etc. Desde el punto de vista matemático, hay que decir que muchos estudios discuten la consistencia de tales ecuaciones en dimensión espacial mayor que uno, pese a lo cual se vienen utilizando, sobre todo en Física y Química, obteniéndose predicciones analíticas y numéricas coincidentes con observaciones en los sistemas reales que pretenden modelar. Por otro lado, pese a que intuitivamente esperamos que la aleatoriedad sea un efecto destructivo, desordenador, hay muchos fenómenos no triviales que aparecen en estos sistemas como el orden inducido por ruido o la resonancia estocástica, por ejemplo. Otro interesante problema matemático es la relevancia de la interpretación que se utilice (Itô o Stratonovič) dentro de este contexto. Una buena referencia para ampliar esta reseña necesariamente telegráfica es [21].

6. Características de los sistemas complejos

Habiendo definido en la sección 2 lo que son los sistemas complejos, y con los ejemplos que acabamos de presentar, estamos en condiciones de profundizar un poco más en el concepto. Para ello, resumiré algunas de las características que se suelen observar en los sistemas complejos.

Más sobre emergencia. Al definir los sistemas complejos, hablamos de la emergencia como su principal característica, entendiéndola como que el comportamiento del todo es distinto del de las partes. Sin embargo, este concepto es mucho más profundo y tiene muchas sutilezas, y habría que tratarlo con detalle. Una buena referencia para ello es [22], donde se clasifica la emergencia en cuatro tipos distintos, que a su vez tienen subclases, atendiendo sobre todo a la existencia y la forma de realimentación entre los componentes del sistema y el comportamiento emergente. Es claro que esta discusión excede con mucho el propósito de este trabajo, pero no quiero dejar de mencionar a modo de ilustración que en Sociología se trabaja mucho con el concepto "emergencia de segundo orden", que tiene que ver con el efecto del comportamiento emergente sobre las partes del sistema (como las normas de las que se dota una sociedad y el efecto de esas normas sobre la propia red social).

Transiciones de fase. Además de la emergencia, una característica presente en la mayoría de los sistemas complejos es la existencia de transiciones de fase. Este concepto físico se aplica de manera generalizada a cualquier situación en la cual un pequeño cambio de los parámetros de control de un sistema lleva a un cambio cualitativo del comportamiento del sistema como un todo. Un ejemplo familiar es, sin ir más lejos, la congelación del agua; otro es la aparición de superconductividad (resistencia eléctrica cero) por debajo de cierta temperatura en muchos materiales. Debo aclarar, en cualquier caso, que el parámetro de control que cambia no tiene por qué ser la temperatura, y puede ser cualquier otra cosa: en un sistema físico podría ser un campo externo aplicado, en un sistema químico podría ser la concentración de determinado compuesto, en una economía pueden ser los tipos de interés... Por otra parte, este fenómeno no es independiente del comportamiento emergente, y de hecho muchas veces se refiere a cambios precisamente en dicho comportamiento.

Universalidad y leyes de escala. Una de las propiedades más curiosas de los sistemas complejos es que presentan un alto grado de universalidad: su comportamiento, y en particular sus transiciones de fase, dependen muy poco de los detalles del sistema, y sólo cosas como la dimensionalidad del sistema o el alcance de las interacciones entre partes son realmente relevantes. Esta propiedad se estudia formalmente con una herramienta matemática llamada el grupo de renormalización (que es en realidad un semigrupo) y va asociada a la existencia de leyes de escala en el sistema [23]. Estas leyes de escala describen la manera en que las magnitudes que caracterizan al sistema se comportan cerca de una transición de fase, punto en el que típicamente el sistema presenta un estado auto-semejante, con ausencia de escalas de longitud características.

Jerarquía. Por último, hay que decir que los sistemas complejos pueden presentar más de un nivel de complejidad. Es decir: podemos tener ciertos componentes acoplados que dan lugar a un comportamiento emergente determinado a una escala, escala a la que esos comportamientos emergentes se acoplan a su vez para originar algo "super-emergente", y así sucesivamente. Aquí es paradigmática la biología, con la jerarquía de niveles molécula–célula–tejido–órgano–organismo–grupo–especie, pero hay otros campos y problemas donde hay muchos niveles de interacción en juego.

7. Algunos campos de aplicación

El espacio de este artículo es muy insuficiente para describir las aplicaciones de la Complejidad. Uno puede hacerse una idea, además de por la generalidad de la definición de sistema complejo, por las indicaciones de la figura 1. Pero dejar así la cuestión me resulta muy insatisfactorio, y aún a riesgo de no ser exhaustivo y de dar la impresión de que la Complejidad sólo tiene que ver con unos pocos campos, quiero mencionar explícitamente algunos.

Física. Como ya hemos dicho, de la Física partieron las ideas originadoras de la Complejidad, y parece un poco de perogrullo el que la Complejidad se aplique en Física. En realidad esto no es así, porque estas ideas están llegando a campos de la Física donde eran unas perfectas desconocidas, campos que van de la Nanotecnología a la Computación Cuántica pasando por la Astronomía. Quizá uno de los retos más importantes hoy en Física es el estudio de sistemas desordenados, que casi siempre son sistemas complejos formados por partes heterogéneas. Por cierto, éste es un problema en el que se necesitan nuevas matemáticas con urgencia [5]. No hay que decir que avances significativos en esta

[5] Por ejemplo, hay un teorema bastante general [24] que identifica una clase de sistemas que no pueden tener transiciones de fase. Sería muy importante disponer de una condición necesaria y suficiente para las transiciones de fase, así como el generalizar estos resultados a

cuestión serían de inmediato interés para los demás campos, donde generalmente la aproximación de suponer que las partes son iguales es muy pobre.

Economía. No creo que tenga que hacer un gran esfuerzo para convencer al lector de que la Economía es un sistema complejo. Muy complejo. Tampoco parece extraño que lo que gustaría a cualquier economista sea resolver el problema micro-macro: cómo se explica la Macroeconomía desde la Microeconomía, igual que la Termodinámica es explicada por la Mecánica Estadística. Aparte de esta pregunta muy general, hay mucho interés hoy en día en modelar los mercados financieros como sistemas complejos, para intentar comprender su funcionamiento (y sacar partido de él, obviamente). Los problemas de gestión de las grandes empresas globalizadas son otra aplicación directa de la Complejidad. Un libro pionero sobre Complejidad en Economía es [25].

Sociología. Las redes sociales son uno de los arquetipos que más se utilizan últimamente para justificar la interdisciplinariedad de la Complejidad, y realmente es así. Cómo se forman, que consecuencias conllevan, cómo dan lugar al establecimiento de normas e instituciones, cómo se ven afectadas por esas normas, qué tienen que ver con la cultura y su evolución son preguntas que están hoy en día en el ambiente de la sociología, y hay mucho trabajo por hacer. Otros problemas interesantes en el campo son la formación de opiniones y consenso, la dinámica electoral o la segregación de poblaciones (asunto en el que ya trabajó el último premio nobel de Economía, Thomas Schelling, desde la perspectiva de los sistemas complejos pero anticipándose a ella [26]). En la zona fronteriza entre la Economía y la Sociología están cuestiones como los problemas de tráfico que también son modelos arquetípicos de sistemas complejos. No puedo resistirme a decir que hace casi diez años ya publiqué un trabajo hablando de “Física Social” y usando el tráfico como ejemplo [27]. De todas maneras, la palabra “Sociofísica” ya había sido utilizada por Serge Galam en los años setenta (en los noventa se introdujo también la “Econofísica”).

Biología. Ya he hablado de la Biología como ciencia en la que la jerarquía de niveles de complejidad es muy intrincada. Para presentar algunos ejemplos concretos aquí, y dejándome prácticamente todos en el tintero, puedo referirme a sistemas tales como el sistema inmunológico, que funciona como un bloque (de manera emergente) a partir de las células y proteínas involucradas en él; al cerebro; a las bandadas de peces o de pájaros; a las redes de regulación genéticas o proteómicas; a las redes ecológicas, o a la cooperación en poblaciones bacterianas. El problema más citado en este contexto es el del plegamiento de proteínas: intentar predecir de que forma se va a estructurar en el espacio una secuencia lineal dada de aminoácidos. Por otro lado, me parece particularmente destacable el que técnicas de modelado y simulación de problemas ecológicos complejos estén siendo transferidas a otros campos, véase por ejemplo [28].

---

sistemas inhomogéneos.

8. Conclusión

Después de este rápido viaje por la Complejidad, ¿qué queda por decir? Todo, claro está. Como decía al principio, mi objetivo fundamental es interesar al lector por estos temas, y en particular transmitir a la comunidad de Matemática Aplicada las oportunidades que a mi juicio se le presentan en este campo que se puede calificar muy apropiadamente de “emergente”. En este sentido, un aspecto que me resulta muy atractivo y del que no he hablado explícitamente es el los sistemas complejos adaptativos: sistemas complejos con el ingrediente añadido de la evolución para adaptarse, bien al ambiente, bien al comportamiento global del sistema, bien a ambos. Esta es una clase de sistemas que aparece en cualquier campo, y ciertamente varios de los mencionados en el apartado anterior corresponden a esta categoría. Su estudio involucra muchas Matemáticas clásicas, desde los sistemas Lotka-Volterra a la teoría de juegos evolutiva, y muchas por hacer, como se describe en [29]. Habría muchas otras cosas que discutir y que me dejo, pero que creo que el lector es sobradamente capaz de descubrir por su cuenta. Una introducción divulgativa extensa es [30], y un punto de partida más especializado puede ser uno de los pocos libros que conozco que tratan específicamente de los sistemas complejos, [31]. En cualquier caso, gracias por haberme acompañado hasta aquí, y para terminar este pequeño ensayo sobre la Complejidad, nada mejor que citar al dibujante y político gallego Castelao. Una de las frases de sus dibujos en el álbum “Nós” se aplica estupendamente al espíritu con el que hay que seguir construyendo la Complejidad (y muchas otras cosas): “Non lle poñades chatas á obra namentras non estea rematada. O que pense que vai mal que traballe nela; hai sitio para todos[6].”

Agradecimientos

Agradezco al Comité Científico de CEDYA 2005 la oportunidad de organizar la sesión monográfica sobre Complejidad, a José A. Carrillo, José A. Cuesta (con el que además he discutido este manuscrito), Alberto Ibort y Enrique Zuazua sus opiniones y comentarios durante la preparación de la sesión, y a Yamir Moreno, Carlos Parés, Víctor Pérez-García y José M. Sancho el haber tomado parte en ella. Gracias también a la Dirección del Boletín de S$\vec{e}$MA por ofrecerme este marco para presentar mis ideas sobre Complejidad. Asimismo, agradezco muy especialmente a todas las personas del Departamento de Matemáticas de la Universidad Carlos III de Madrid que participaron en la organización de CEDYA 2005 su extraordinario trabajo.

Este artículo está dedicado a la memoria de Carlos Pérez García, del Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra, y presidente fundador del Grupo Especializado de Física Estadística y No Lineal de la Real Sociedad Española de Física. Un gran amigo con el que ya no tendré el

[6]No le saquéis defectos a la obra mientras no esté terminada. El que piense que va mal que trabaje en ella; hay sitio para todos.

placer de aprender sobre Complejidad ni de discrepar en muchas cosas, un gran amigo que se ha ido demasiado pronto.

Referencias

[1] G. W. Flake. *The Computational Beauty of Nature.* M.I.T. Press, 1998.

[2] http://www.cs.huji.ac.il/∼etom/maptree/?complexity+uses.

[3] El sitio web se está poniendo en marcha: http://www.giacs.org.

[4] http://www.santafe.edu.

[5] P. W. Anderson. More is different. *Science* 177:393–396, 1972.

[6] Hay una infinidad de libros sobre Mecánica Estadística, pero uno reciente, relativamente sencillo y muy autocontenido es el del físico matemático D. C. Mattis. *Statistical Mechanics Made Simple.* World Scientific, 2003.

[7] A. Scott, editor. *Encyclopedia of Nonlinear Science.* Taylor and Francis, 2005.

[8] S. Solomon y E. Shir. Complexity; a science at 30. *Europhys. News* 34(2):54-57, 2003.

[9] http://complexity.cogniview.com/MapIndex.html

[10] M. San Miguel. Interdisciplinariedad: Comentarios desde la perspectiva de un físico. *El papel social de la ciencia en baleares: Un homenaje a Javier Benedí.* Eds. C. Duarte y F. Grases, Universitat Illes Balears, 235-250, 2003.

[11] A título de curiosidad, en la página web http://gisc.uc3m.es/∼anxo/math.html voy compilando una lista de centros de Matemáticas donde se trabaja en estos campos.

[12] C. C. Lin y L. Segel. *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences.* SIAM Classics in Applied Mathematics vol. 1, 1998.

[13] Plan Nacional de I+D+i, vol. II, Áreas Prioritarias. http://-wwwn.mec.es/ciencia/plan_idi/files/Plan_Nacional_Vol_II.pdf, p. 201.

[14] S. Strogatz. *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order.* Hyperion, 2003.

[15] N. Zabusky. Computational synergetics and mathematical innovation. *J. Comput. Phys.* 43:195, 1981.

[16] D. Watts y S. Strogatz. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature* 393:440-442, 1998.

[17] M. E. J. Newman. The structure and function of complex networks. *SIAM Review* 45:167-256, 2003.

[18] M. A. Fontelos. Formación de singularidades y problemas de frontera libre en mecánica de fluídos. *Boletín* S$\vec{e}$MA 30:143-166, 2004.

[19] http://www.damflow.com.

[20] G. D. Montesinos y Víctor M. Pérez-García. Solitones estabilizados. *Revista Española de Física* 18(3):57-60, 2004.

[21] J. García-Ojalvo y J. M. Sancho. *Noise in Spatially Extended Systems.* Springer Institute for Nonlinear Science Series, 1998.

[22] J. Fromm. Types and forms of emergence. http://arxiv.org/abs/nlin.AO/0506028, 2005.

[23] G. I. Barenblatt. *Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics.* Cambridge Texts in Applied Mathematics, 1996.

[24] J. A. Cuesta y A. Sánchez. General non-existence theorem for phase transitions in one-dimensional systems with short range interactions, and physical examples of such transitions. *J. Stat. Phys.* 115:869–893, 2004.

[25] P. W. Anderson, K. J. Arrow y D. Pines, editores. *The Economy as an Evolving Complex System.* Addison-Wesley, 1988.

[26] T. C. Schelling. *Micromotives and Macrobehavior.* W. W. Norton and Co., 1978.

[27] A. Sánchez. Un ejemplo de Física Social: Física del tráfico. *Revista Española de Física* 10(4):16–25, 1996.

[28] V. Grimm *et al.* Pattern-oriented modeling of agent based complex systems: Lessons from ecology. *Science*, 310:987–991, 2005.

[29] S. A. Levin. Complex adaptive systems: Exploring the known, the unknown and the unknowable. *Bull. Am. Math. Soc.* 40:3–19, 2002.

[30] M. A. Waldrop. *Complexity: The Emerging Science at the Edge of Order and Chaos.* Simon & Schuster, 1992.

[31] Y. Bar-Yam. *Dynamics of Complex Systems.* Addison-Wesley, 1997. Se puede descargar de http://necsi.org/faculty/bar-yam.html.